## 培优课02 函数的值域

### 培优点一 分式函数的值域

#### 审题指导

典例1 （审题①分式函数常用分离常数法）的值域是.

**解题观摩**

[解析],…………审题①

显然，则，所以函数的值域是.

#### 通性通法

分式函数求值域，主要包括：

1.一次除以一次，形如,,,为常数，，，常用分离常数法或反解法;

2.一次除以二次或二次除以一次，形如,,,,为常数，，或,,,,为常数，，，常用对勾函数性质法和判别式法.

#### 培优训练

##### 给定区间的分式函数的值域条件变式

1. 若将典例1中的条件“函数”改为“函数,”，则函数的值域为.

[解析]由，得，因为，所以，解得，即函数，的值域为.

##### 形如或的函数的值域条件变式

2. （双空题）函数的值域为;函数的值域为.

[解析]对于第一问：（对勾函数性质法）因为，所以当时，；

当时，，

由对勾函数的性质可知，或，

.

综上，的值域为.

对于第二问：（判别式法）由题可知定义域为，由，得，

因为当时，上式成立，所以，即，解得或.

综上，的值域为.

### 培优点二 根式函数的值域

#### 审题指导

典例2 函数（审题①平方和为定值考虑三角换元法 审题②两边同时平方后通过观察考虑主元法 审题③平方和为定值根据勾股定理考虑几何意义法 审题④平方和为定值通过观察考虑向量法）的值域是.

**解题观摩**

[解析]（法一：三角换元法）由，

，…………审题①

则，又，

所以，即.

（法二：主元法）由题意可知函数的定义域为，因为，

，…………审题②

故根据一次函数的单调性可知，解得

（法三：几何意义法），

当或时，，当时，,，

，…………审题③

不妨设,，为以为直径的半圆上的一个动点，，如图1，

所以，易知，可由基本不等式链得，当且仅当时，等号成立，所以当位于的中点时，取到最大值，最大值为2.综上，.

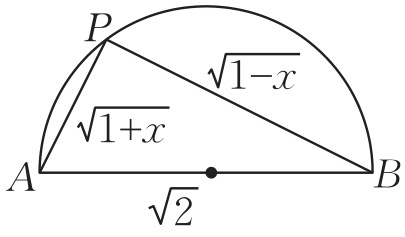


图1

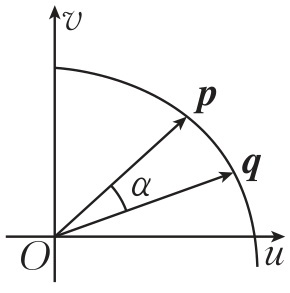


图2

（法四：向量法），而，

如图2，，…………审题④

,的夹角为 ,，则，即.

#### 通性通法

通常遇到根式函数，会倾向于选择用代数换元法求解值域，但并不是所有的情况下都适用这种方法，形如,或,等函数可以采用其他方法处理，例如，观察法、单调性法、三角换元法、平方法、主元法、根的判别式法、向量法、几何意义法等.

#### 培优训练

##### 利用观察法+单调性法求值域条件变式

1. 若将典例2中的条件“函数”改为“函数”，则函数的值域为.

[解析]（观察法单调性法）观察可知函数和函数在公共定义域上均为增函数，故函数，所以该函数的值域为.

##### 平方法+判别式法（主元法）条件变式

2. 若将典例2中的条件“函数”改为“函数”，则函数的值域为.

[解析]由移项并两边同时平方消去根号后得，即，

因为，所以，

解得或，所以函数的值域为.